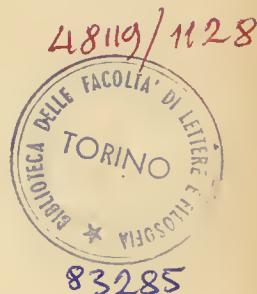
SOPRA IL VALORE MASSIMO E IL SIGNIFICATO FISICO DELLA FUNZIONE T_{me} DI MAXWELL

RICERCHE

DI

A. GARBASSO
(IN TORINO)

Estratto dal *Nuovo Cimento* Serie 5. vol. I.
Fascicolo di Giugno 1901

PISA
DALLA TIPOGRAFIA PIERACCINI
1901

SOPRA IL VALORE MASSIMO E IL SIGNIFICATO FISICO DELLA FUNZIONE T_{me} DI MAXWELL.

Ricerche di A. GARBASSO [1])

(in Torino).

§ 1. Secondo la « teoria dinamica dell'elettromagnetismo », che dobbiamo al Maxwell [2]), le intensità delle correnti, essendo derivate di tempo delle variabili elettriche (y_r), entrano nell'espressione dell'energia cinetica del sistema appunto come le velocità relative alle coordinate geometriche (x_s).

Quindi l'energia cinetica (T) risulterà in generale dalla riunione di tre somme, le quali, seguendo il Maxwell, vogliamo indicare rispettivamente con le lettere T_m, T_e e T_{me}. Il polinomio T_m contiene in ogni suo termine un quadrato o un rettangolo di velocità geometriche, e T_e invece ha i rettangoli e i quadrati delle correnti. Quanto a T_{me} ogni derivata della prima categoria moltiplica in esso una derivata della seconda; quindi la sua espressione ha la forma:

$$T_{me} = \Sigma K_{s,r} \dot{x}_s \dot{y}_r ,$$

essendo le $K_{s,r}$ funzioni delle variabili e, propriamente, come è facile riconoscere, delle sole variabili geometriche.

Se ci mettiamo nel caso semplice di un toro metallico, rigido, girevole intorno al suo asse, e percorso in qual-

1) Della prima parte di questo lavoro (paragrafi 1-12 e 14) fu pubblicato un riassunto negli Atti della R. Accademia di Torino (Adunanza del 24 Febbraio 1901). — Le esperienze furono eseguite nell'Istituto Fisico, diretto dal Prof. A. Naccari, al quale l'A. esprime tutta la sua riconoscenza.

2) J. C. Maxwell. A Treatise on Electricity and Magnetism. (Oxford 1873). Vol. 2, Part. 4., Chap. 6.

che modo da un flusso di elettricità, potremo scrivere senz' altro:

$$T_m = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 ,$$

$$T_e = \frac{1}{2} L \dot{y}^2 ,$$

$$T_{me} = K \dot{x} \dot{y} ,$$

dove le singole lettere, tolta la K, hanno un significato fisico ben chiaro.

Se non vi è corrente, infatti, ogni cosa si riduce alla forma semplice:

$$T = T_m = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 ,$$

dunque M è il momento di inerzia del toro intorno al suo asse; se invece le masse ponderali sono in riposo e l' elettricità si muove è:

$$T = T_e = \frac{1}{2} L \dot{y}^2 ,$$

e però L rappresenta il coefficiente di autoinduzione del nostro circuito.

Resta a vedersi quale sia il significato della costante K e per questo giova considerare il solito biciclo del Maxwell.

Imaginiamo (fig. 1) un sistema del quale fanno parte due

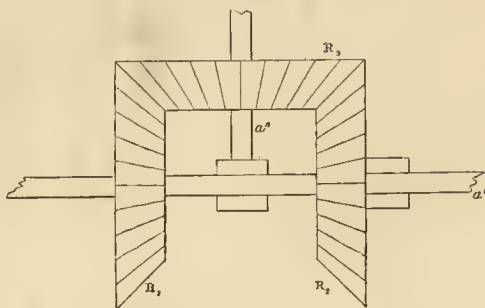



Fig. 1:

ruote R_1 e R_2 mobili intorno ad un medesimo asse (a'); siano M_1 e M_2, $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$ rispettivamente i loro momenti di inerzia e

Ingranaggio differenziale studiato dal Maxwell.

le velocità angolari. Si abbia ancora un manicotto il quale porti un altro asse (a''), normale al primo, e intorno a questo giri una terza ruota R_3. Sia poi $M_{3,1}$ il momento di a'' e R_3 intorno ad a' e $M_{3,2}$ il momento della ruota R_3 intorno ad a''. Vogliamo ancora supporre che quest' ultima ruota sia fornita di denti, i quali ingranino con altri denti, disposti sopra R_1 e R_2 in due cerchi, uguali fra loro e al contorno di R_3.

Per mezzo di calcoli noti l' energia cinetica complessiva del sistema si scriverà sotto la forma:

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} M_{3,1} \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} M_{3,2} \left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{2}\right)^2,$$

$$= \frac{1}{2}\left(M_1 + \frac{M_{3,1}}{4} + \frac{M_{3,2}}{4}\right) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(M_2 + \frac{M_{3,1}}{4} + \frac{M_{3,2}}{4}\right) \dot{x}_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{4} (M_{3,1} - M_{3,2})\, \dot{x}_1 \dot{x}_2 .$$

Se si confronta la espressione presente con quelle, che abbiamo ottenuto per il sistema da noi considerato innanzi, si può concludere senz' altro che la costante K dovrà interpretarsi come caratteristica dei vincoli, che legano l' elettricità alla materia ponderale. Se K è zero le cose vanno *come se* questi vincoli non esistessero; sebbene non si possa concludere senz' altro alla loro mancanza (si confronti il paragrafo decimoquinto).

§ 2. Volendo procedere innanzi nel calcolo conviene notare che, nel caso della nostra disposizione, la sola coordinata geometrica variabile (la x) è, come la y, una coordinata ciclica, quindi le tre costanti M, L, K non possono dipendere da essa.

Ora, poichè le espressioni delle forze, secondo le formole di Lagrange, sono lineari ed omogenee nelle derivate di T, si potranno scindere tutte in tre componenti, in corrispondenza del modo, nel quale si è divisa l' energia.

La forza X, per esempio, che agisce su la variabile angolare x, avrà la forma:

$$X = X_m + X_e + X_{me},$$

essendo:

$$X_m = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_m}{\partial \dot{x}} = M\ddot{x},$$

$$X_e = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_e}{\partial \dot{x}} = 0,$$

$$X_{me} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_{me}}{\partial \dot{x}} = K\ddot{y}.$$

E se la forza esterna è zero, come possiamo ammettere, per piccole x, in prima approssimazione, avremo:

$$M\ddot{x} + K\ddot{y} = 0, \tag{1}$$

e quindi:

$$M\dot{x} + K\dot{y} = \textit{costante}.$$

Ma se non c' è corrente e l' anello è in riposo il primo membro è nullo, e però la costante deve essere sempre uguale allo zero. Abbiamo dunque:

$$M\dot{x} + K\dot{y} = 0,$$

e, di conseguenza:

$$M x + K y = \textit{costante}.$$

Anche questa costante dovrà porsi uguale allo zero, se si conviene di contare gli angoli a partire dalla quiete; dunque:

$$M x + K y = 0,$$

tale equazione esprime per il nostro sistema il principio delle aree. Da essa risulta senz' altro:

$$x = -\frac{K}{M} y. \tag{2}$$

§ 3. Sembra che il Maxwell abbia fatto alcune esperienze con un apparecchio, la teoria del quale si riduce alla formola (1); egli scrive infatti [1]:

1) L. c. pag. 200.

« We take a circular coil of a great many windings, and « suspend it by a fine vertical wire, so that its windings are « horizontal, and the coil is capable of rotating about a ver- « tical axis, either in the same direction of the current in « the coil, or in the opposite direction.

« We shall suppose the current to be conveyed into the « coil by means of the suspending wire, and, after passing « round the windings, to complete its circuit by passing down « wards through a wire in the same line with the suspending « wire and dipping into a cup of mercury.

« Now let a current be made to pass through the coil in « the direction N. E. S. W. If electricity were a fluid like « water, flowing along the wire, then, at the moment of star- « ting the current, and as long as its velocity is increating, « a force would require to be supplied by the elasticity of the « suspending wire, the coil would at first rotate in the oppo- « site direction or W. S. E. N, and this would be detected « by means of the mirror. On stopping the current there would « be another movement of the mirror, this time in the same « direction as that of the current.

« No phenomenon of this kind has yet been observed ».

Ora, si può dubitare se le condizioni, indicate nel passo, che ho riferito, siano le più opportune per istituire l' esperienza, di cui si tratta.

E veramente, per la grande torsione posseduta da un filo metallico, occorre uno sforzo notevole a rotare il sistema, mentre la presenza di un' appendice, che s' affonda nel mercurio, deve contribuire per sua parte, in modo efficace, a smorzarne gli impulsi.

§ 4. Volendo evitare questi inconvenienti, i quali diminuiscono di molto la sensibilità della disposizione, non v' è altro modo che di indurre nel circuito mobile una forza elettromotrice, modificando il flussó che lo attraversa. Propriamente bisognerà che l' azione induttiva si eserciti col ridurre a zero un campo magnetico, onde evitare lo smorzamento dei moti, il quale seguirebbe senz' altro, in virtù delle correnti di Foucault.

In tale ipotesi è facile scrivere il valore della y, che vuol essere introdotto nella formola (2). E per vero, se l'intensità del campo fosse H, e l'area interna dell'anello S, la variazione del flusso sarebbe :

$$-\mathrm{H\,S}\,,$$

dunque :

$$y=\frac{\mathrm{H\,S}}{\mathrm{R}}\,,$$

e :

$$x=-\frac{\mathrm{K\,H\,S}}{\mathrm{M\,R}}\,. \tag{3}$$

Quì si presenta una quistione, che per la pratica è molto importante; e cioè quale sostanza e forma sia da preferirsi per l'anello conduttore, e quale mezzo si debba impiegare per la produzione del campo, se un elettromagnete simile a quello di Faraday, o una semplice spirale percorsa da corrente.

§ 5. Bisogna osservare in primo luogo che, restando inalterata la forma e la grandezza del toro, il prodotto M R varierà proporzionalmente al prodotto della *densità* (d) e della *resistenza specifica* (ρ); è facile dunque decidere quale sia il materiale più indicato per le esperienze.

Si trova infatti :

	Al	Cu	Ag	Zn	Au	Fe	Pt
d	2,65	8,95	10,47	6,86	19,29	7,79	20,18
$10^{-3}\,\rho$	2,889	1,584	1,492	5,580	2,041	9,636	8,981
$10^{-3}\,d\rho$	7,66	14,18	15,62	38,28	39,37	75,06	181,24

e però in primo luogo si raccomanda l'alluminio; dopo di esso restano in condizioni quasi pari l'argento e il rame.

§ 6. Ciò premesso cerchiamo quale sia la forma, che conviene meglio.

Per un anello circolare, ricavato da una lastra di spessore h, quando il raggio interno sia r_1 e l' esterno r_2, si avrà:

$$M = d.\int_0^h dh \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} r^3 \, dr,$$

$$= 2\pi h d.\int_{r_1}^{r_2} r^3 \, dr,$$

$$(4) \qquad = \frac{1}{2}\pi h d.(r_2^4 - r_1^4).$$

E la resistenza, R, manifestamente si ottiene ponendo:

$$\frac{1}{R} = \Sigma \frac{1}{\rho \frac{2\pi r}{dr\,dh}},$$

$$= \Sigma \frac{dr\,dh}{2\pi r \rho},$$

$$= \frac{h}{2\pi\rho}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r},$$

$$= \frac{h}{2\pi\rho} \log \frac{r_2}{r_1}.$$

Risulta dunque, nel caso nostro:

$$x = -\frac{K H r_1^2}{\pi d\rho . \frac{r_2^4 - r_1^4}{\log \frac{r_2}{r_1}}}$$

Per andare innanzi nel calcolo chiameremo l la larghezza dell' anello, di modo che si avrà:

$$r_2 = r_1 + l,$$

dunque:

$$\frac{r_2^4 - r_1^4}{\log \frac{r_2}{r_1}} = \frac{(r_1 + l)^4 - r_1^4}{\log \frac{r_1 + l}{r_1}},$$

$$= r_1^4 \frac{\left(\frac{r_1 + l}{r_1}\right)^4 - 1}{\log \frac{r_1 + l}{r_1}},$$

ossia, ponendo:

$$\left(\frac{r_1 + l}{r_1}\right)^4 = z,$$

$$\frac{r_2^4 - r_1^4}{\log \frac{r_2}{r_1}} = r_1^4 \frac{z - 1}{\log z^{\frac{1}{4}}} = 4 r_1^4 \frac{z - 1}{\log z}.$$

Quindi, sostituendo:

$$x = - \frac{K H}{4 \pi r_1^2 d \rho \frac{z - 1}{\log z}}. \tag{5}$$

Si noterà per prima cosa che lo spessore h non interviene nella formola finale; si può dunque prendere la lastra più o meno sottile, secondo che piace meglio.

Quanto ad r_1 converrà, come appare, di prenderlo piccolissimo.

Veniamo al fattore

$$\frac{z - 1}{\log z},$$

nel quale, manifestamente, la z è maggiore di uno.

È facile provare che esso cresce sempre con l' argomento; e, poichè i valori più grandi della x corrisponderanno ai più piccoli di questa funzione, bisognerà dunque fare la z piccola per quanto è possibile, vale a dire limitare la l, che è la larghezza dell' anello.

Che $\frac{z-1}{\log z}$ cresca sempre, nel nostro caso, con z, si può dimostrare così. Sarà:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z-1}{\log z}\right)=\frac{\log z-(z-1)\frac{1}{z}}{\log^2 z},$$

$$=\frac{z\log z-(z-1)}{z\log^2 z},$$

e però avremo una funzione crescente quando sia:

$$z\log z-(z-1)>0,$$

cioè:

$$\log z>\frac{z-1}{z},$$

o anche, passando dai logaritmi ai numeri:

$$z>e^{\frac{z-1}{z}},$$

$$>1+\frac{z-1}{z}+\frac{(z-1)^2}{2!\,z^2}+\frac{(z-1)^3}{3!\,z^3}+\frac{(z-1)^4}{4!\,z^4}+\ldots,$$

ma questo si verifica senza dubbio se è:

$$z>1+\frac{z-1}{z}+\frac{(z-1)^2}{2!\,z^2}+\frac{z^3}{3!\,z^3}+\frac{z^4}{4!\,z^4}+\ldots,$$

$$>2-\frac{1}{z}+\frac{(z-1)^2}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots,$$

$$>e-\frac{1}{z}+\frac{(z-1)^2}{2!\,z^2}-\frac{1}{2}.$$

Sotto altra forma la medesima condizione può scriversi:

$$z^3-e\,z^2+2\,z-\frac{1}{2}>0,$$

ossia:

$$(z^2-0{,}99\,z+0{,}28)\,(z-1{,}73)>0;$$

e questo si verifica sempre quando sia:

$$z > 1{,}73 .$$

Quanto all' intervallo che corre per z da 1 a 1,73 possiamo rendercene conto osservando che in esso si può sempre fare:

$$z = 1 + u ,$$

senza che u arrivi all' unità, quindi il logaritmo di z può svilupparsi con la nota serie, che dà il logaritmo di $1 + u$ per u minore di uno. Sarà:

$$\begin{aligned} \log z &= \log (1 + u) , \\ &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \ldots , \end{aligned}$$

e dunque:

$$\begin{aligned} z \log z - (z - 1) &= (1 + u) \log (1 + u) - u , \\ &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \ldots \\ &\quad + u^2 - \frac{u^3}{2} + \frac{u^4}{3} - \frac{u^5}{4} + \ldots \\ &\quad - u , \\ &= \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2.3} u^3 + \frac{1}{3.4} u^4 - \frac{1}{4.5} u^5 + \ldots , \\ &= u^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{u}{2.3} \right) + u^4 \left(\frac{1}{3.4} - \frac{u}{4.5} \right) + \ldots , \end{aligned}$$

la quale serie ha senza dubbio una somma positiva [1]).

1) Per una via meno diretta, e con un procedimento sommario, si può dimostrare la stessa cosa nel modo che segue.

Si cambii la variabile, ponendo:

$$u = \log z ;$$

verrà:

$$z = e^u ,$$

Riassumendo conviene, per la sensibilità dell' apparecchio, che il raggio interno dell' anello sia piccolo e la larghezza pure. In pratica anzi converrà di prendere piccola la larghezza e piccolissimo il raggio, perchè, almeno da principio, il fattore r_1^2 cresce più presto che $\frac{z-1}{\log z}$.

Infatti per:

$r_1 =$	1	2	3	4	5	10

si ha:

$r_1^2 =$	1	4	9	16	25	100 ,

mentre per:

$\sqrt[4]{z} =$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2,0

viene:

$\frac{z-1}{\log z} =$	1,23	1,48	1,76	2,12	2,90	5,41 ,

e quindi, mentre, moltiplicando per 10 il raggio, il primo fattore si moltiplica per 100, moltiplicando per 10, da principio, la larghezza dell' anello, il secondo fattore si moltiplica solamente per $\frac{5,41}{1,23} = 4,40$. Bisogna però notare che, scrivendo l' equazione di partenza, si è supposto implicitamente che il momento di inerzia del toro fosse grande rispetto al momento delle altre parti dell' equipaggio mobile. Ora, se si fa piccola la larghezza e piccolissimo il raggio dell' anello, vi è un solo modo per ottenere un momento sensibile, ed è di fare grande

---

e:

$$\frac{z-1}{\log z} = \frac{e^u - 1}{u},$$

$$= \left(u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots\right)\frac{1}{u},$$

$$= 1 + \frac{u}{2!} + \frac{u^2}{3!} + \cdots;$$

ora questo secondo membro cresce manifestamente con u, e quindi con z.

l' altezza h. La forma più conveniente del conduttore da impiegarsi non è dunque propriamente quella di un disco annulare, ma piuttosto quella di *un tubicino (d' alluminio) a foro capillare.*

§ 7. Qui però interviene la considerazione di un altro elemento; per impiegare un conduttore in forma di tubo bisogna infatti rinunciare a produrre il campo con un elettromagnete del tipo di Faraday, e sostituire quest' ultimo con una semplice spirale, percorsa da corrente. Ciò porta una limitazione sensibile nella grandezza di H, e rimane a vedersi se convenga di guadagnare così da una parte, mentre si perde dall' altra.

Per decidere questo osserveremo anzitutto che se il campo magnetico dovesse prodursi con due bobine, e il conduttore muoversi nello spazio interposto, la h non potrebbe crescere molto senza che si indebolisse corrispondentemente il campo. Quindi il problema in questo caso dovrebbe porsi in tutt' altro modo.

Il momento di inerzia è dato, o almeno non deve essere inferiore ad un certo limite, la h pure è data, si tratta di cercare i valori più convenienti per r_1 e l. La cosa non presenta nessuna difficoltà.

Essendo:

$$d.(r_2^4 - r_1^4) = C^2 ,$$

con C costante, si tratta di rendere massimo:

$$|x| = \phi = \frac{|K|.|H|}{\pi \rho C^2} r_1^2 \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

In prima approssimazione si può porre $\frac{C^2}{d}$ in luogo di r_2^4, quindi:

$$\phi = \frac{|K|.|H|}{4 \pi \rho C^2} r_1^2 \log\left(\frac{C^2}{d r_1^4}\right),$$

$$= \frac{|K|.|H|}{4 \pi \rho C^2} r_1^2 \log\left(\frac{C}{r_1^2 \sqrt{d}}\right),$$

o, scrivendo u per $r_1^2\sqrt{d}$:

$$\Phi = \frac{|K|.|H|}{2\pi\rho C^2\sqrt{d}} u \log\frac{C}{u}.$$

La condizione del massimo sarà:

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{|K|.|H|}{2\pi\rho C^2\sqrt{d}}\left(\log\frac{C}{u} - u\frac{\frac{C}{u^2}}{\frac{C}{u}}\right) = 0$$

ossia:

$$\log\frac{C}{u} - 1 = 0,$$

$$\frac{C}{u} = e \text{ [1]},$$

e:

$$r_1^2 = \frac{C}{e\sqrt{d}}.$$

Ma era:

$$r_2^2 = \frac{C}{\sqrt{d}},$$

dunque:

$$r_1^2 = \frac{r_2^2}{e},$$

$$r_1 = \frac{r_2}{\sqrt{e}},$$

$$= \frac{r_1 + l}{\sqrt{e}},$$

1) Si tratta veramente di un massimo, poichè risulta: $\frac{d^2\Phi}{du^2} = -\frac{|K|.|H|e}{2\pi\rho C^3\sqrt{d}}$, per $u = \frac{C}{e}$.

e però:

$$r_1 \sqrt{e} = r_1 + l\,,$$

$$l = r_1 (\sqrt{e} - 1)\,,$$

$$(6) \qquad = 0{,}65\, r_1\,.$$

Bisogna dunque prendere, con la h prescritta, un raggio tale che, essendo la larghezza dell' anello i due terzi di esso all' incirca, il momento d' inerzia riesca non inferiore al limite assegnato. Quanto al fattore numerico, essendo il prodotto $\rho \sqrt{d}$ sensibilmente costante per l' alluminio, il rame e l' argento si potrà impiegare ad arbitrio uno di questi tre metalli.

Infatti si trova:

	Al	Cu	Ag
d	2,65	8,95	10,47
$\sqrt{d}$	1,63	2,99	3,24
$10^{-3}\rho$	2,889	1,584	1,492
$10^{-3}\rho\sqrt{d}$	4,71	4,74	4,83

§ 8. Per farci un' idea della praticità delle due soluzioni calcoliamo il coefficiente:

$$c = \frac{\log z}{4\pi r_1^2 d \rho (z - 1)}$$

per due diversi conduttori.

Il primo sarà un anello d' argento, definito dalle costanti:

$$r'_1 = 0{,}30 \qquad r'_2 = 0{,}50 \qquad h' = 0{,}10\,,$$

e l' altro un tubicino d' alluminio con le dimensioni:

$$r''_1 = 0{,}05 \qquad r''_2 = 0{,}15 \qquad h'' = 42{,}99\,;$$

raggio e spessore di quest' ultimo sono presi di tale grandezza da rendere possibile senza troppo disagio la lavorazione; la h, della quale per ora non si ha a tenere conto, è scelta in modo che i momenti di inerzia dei due tori risultino uguali.

Si ottiene:

$$c' = 0{,}0000172\ ,$$

$$c'' = 0{,}0002283\ .$$

Perchè le quantità $c\,H$ si uguagliassero nei due casi bisognerebbe fare:

$$H' = \frac{c''}{c'}\,H''\ ,$$

$$= 13{,}27\ H''\ ,$$

e se fosse, per esempio:

$$H'' = 100\ ,$$

che, per una semplice spirale, è già un campo notevole, si dovrebbe avere:

$$H' = 1327\ ,$$

cosa non difficile da ottenere con un elettromagnete di Faraday.

Un argomento poi che ci porta a scegliere l' anello d' argento, piuttosto che il tubo d' alluminio, è l' argomento del peso. Con i dati, che abbiamo ammesso poc' anzi, si troverebbe infatti che il primo sistema importa

0,5263 gr.,

mentre il secondo raggiunge

7,1597 gr.

Quindi la necessità di impiegare nel caso del tubicino d' alluminio un filo di gran lunga più robusto per sospendere l' equipaggio; ciò che porterebbe naturalmente ad introdurre una forza di torsione più grande.

Il resultato di questa analisi minuta si può riassumere dunque nell' opportunità di scegliere un anello d'argento come conduttore, e un elettromagnete per la produzione del campo.

§ 9. Ho costruito all' uopo l' apparecchio, che la figura 2 rappresenta in prospettiva.

Due bobine uguali, con nucleo di ferro, sono disposte verticalmente, una sopra l'altra. L'inferiore è fissata alla tavo-

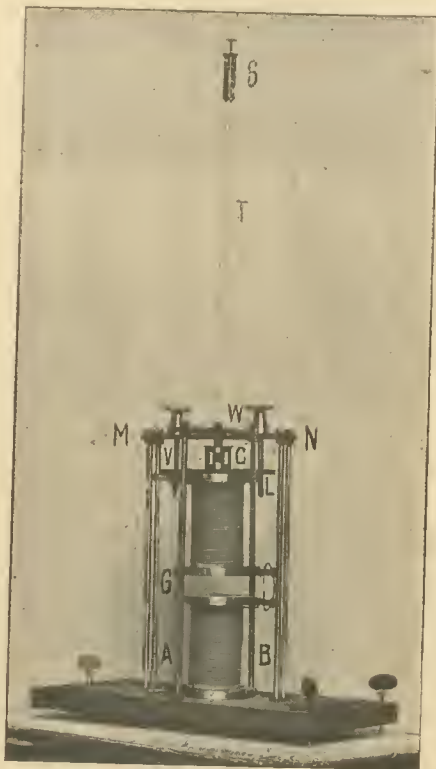



Fig. 2.

letta del sostegno, la superiore invece si regge per mezzo di due grosse viti, che ingranano in due femmine praticate nella lastra metallica L, mentre passano senza mordere per la traversa M N, e vi s'appoggiano con le testate.

Due guide, delle quali una sola, G, si scorge bene nella figura, scorrendo lungo le aste verticali A e B, impediscono alla bobina superiore i movimenti di beccheggio.

A questa stessa bobina, in alto, sopra l'orifizio del foro, che l'attraversa in tutta la lunghezza, è fissata una camera, C, munita di finestra; la quale si prolunga alla sua volta con un tubo di vetro lungo e sottile, T. Il tubo passa liberamente per

un ampio foro, praticato nella parte mediana delle due lastre ortogonali M N e V W, e reca all' estremità superiore, S, gli organi necessarii per la sospensione.

Ogni bobina è alta in tutto dodici centimetri; le lastre terminali avendo un centimetro di spessore, ne rimangono dieci per la parte di mezzo, destinata a ricevere il filo: vi sono di questo undici strati e in ciascun strato quarantuna spire. Il diametro del conduttore è di due millimetri all' incirca.

Quanto ai fori assiali, che traversano le bobine, essi hanno una luce di un centimetro e mezzo; però, agli estremi, sono incastrati dei cilindretti cavi, con cinque millimetri appena di diametro interno [1]).

§ 10. Il toro mobile fu l' anello d' argento, del quale ho discorso innanzi [2]); il rapporto dei raggi :

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1 + l}{r_1} = 1 + \frac{l}{r_1} = \frac{0,5}{0,3} = 1,67$$

fornisce :

$$l = 0,67\, r_1 ,$$

1) In alcune esperienze preliminari avevo adottato la disposizione, che la figura 3 rappresenta schematicamente; quì la distanza fra le bobine era di qualche centimetro, il campo, determinato con il metodo delle correnti indotte, risultò di 100 unità o poco più. Il toro impiegato fu un anello di rame, definito dalle seguenti costanti:

$$r_1 = 0,10$$

$$r_2 = 0,75$$

$$h = 0,10 ;$$

facendo il calcolo nel modo indicato al dodicesimo paragrafo risulta:

$$| K | < 2 \text{ circa.}$$

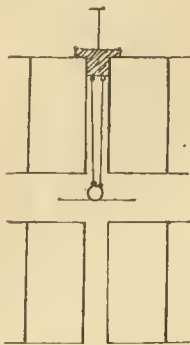



Fig. 3.

Questo esempio può indicare quale vantaggio importino le condizioni consigliate dalla teoria. È dubbio solamente se le formole si possano ancora applicare, quando la sospensione è fatta con due fili.

2) Si confronti il paragrafo ottavo.

con che è rispettata, all' ingrosso, la condizione espressa con la formula (6). Il valore poi di r_1 e di h li scelsi in base al concetto che il momento del toro dovesse risultare almeno cinquanta volte più grande di quello delle parti rimanenti della sospensione.

Questa è fatta per mezzo di un tubicino cilindrico di vetro, lungo 15 centimetri, spesso 0,050; il suo peso era 0,085 gr., la densità, determinata con una misura diretta, si trovò uguale prossimamente a 3,0.

Posto:

$$\pi\, h\, d\, .\, (r_2^2 - r_1^2) = 0{,}085$$ [1],

si ricava con questi dati:

$$r_1 = 0{,}005\, .$$

Su la faccia inferiore dell' anello d' argento è incollato un foglio di carta, con un forellino al centro. Tre fili di rame sottilissimi, lunghi un centimetro, attorti a treccia per metà della loro lunghezza, e ripiegati poi a novanta gradi dalla direzione primitiva, a centoventi uno dall' altro [2]), servono per assicurare al tubetto di vetro il sistema dell' anello. A tale scopo si fa riposare il disco di carta sopra i tre fili, come sopra una mensola, fermandolo ad essi con una goccia di cera: e la treccia si introduce a forza nel cavo del tubicino.

Alla parte superiore di questo, in corrispondenza della camera C, si fissa poi, anche con un po' di cera, lo specchietto. Esso aveva nelle mie esperienze un raggio di 0,375 centimetri, e un peso di 0,042 grammi; la sua densità mi risultò uguale a 2,4.

Ponendo:

$$\pi\, h\, d\, r^2 = 0{,}042\, ,$$

si ottiene:

$$h = 0{,}040.$$

1) Indico il peso dell' unità di volume con la stessa lettera, che ho impiegato a rappresentare la densità.

2) La fig. 4 *a* li rappresenta nella scala di 3 a 1.

La figura 4 b dà un' idea dell' equipaggio mobile, ridotto alla metà della sua grandezza reale.

Con i dati, che ho riferito, riesce facile adesso di calcolare i momenti di inerzia relativi all' anello (M_A), al tubetto di vetro (M_T), e allo specchio (M_S).

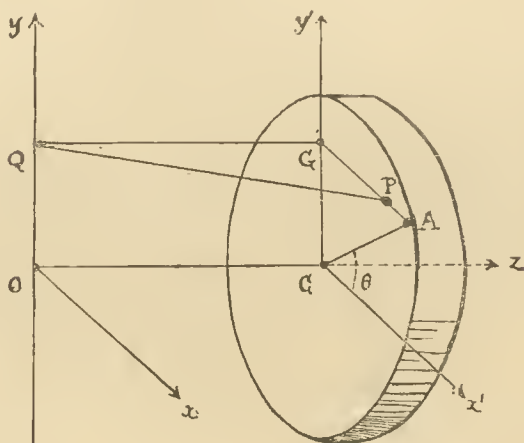



Fig. 4. Fig. 5.

Per l' anello e il tubetto il calcolo va fatto in base alla formola (4), si ottiene:

$$M_A = 0{,}08947\ ,$$
$$M_T = 0{,}00003\ .$$

Per lo specchio è necessario ricavare una nuova espressione, la quale, del resto, ci sarà utile anche nel seguito.

Il problema consiste nel determinare il momento di inerzia di una ruota massiccia, le cui basi sono parallele all' asse di rotazione; si aggiunge ancora che la normale alle basi nel centro viene a tagliare l' asse predetto in un suo punto O. Assumeremo (fig. 5) questo punto come origine di un sistema di coordinate, prendendo per asse y l' asse di rotazione, per

asse z la normale da O alle basi, e per asse x finalmente la normale comune ad y e z.

La distanza di un punto, P, della ruota dall' asse di rotazione è la distanza di P dal punto Q, che ha la stessa y; avremo dunque:

$$d\,M = d \,.\, \overline{QP}^2 \,.\, d\,v\,,$$

$$= d \,.\, (\overline{QG}^2 + \overline{GP}^2) \,.\, d\,v\,,$$

$$= d \,.\, (z^2 + x^2)\, dx\, dy\, dz\,,$$

e, integrando:

$$M = d \,.\, \iiint (z^2 + x^2)\, d\,x\, d\,y\, d\,z\,,$$

$$\frac{1}{4}\, M = d \,.\, \int_{\Delta}^{\Delta+h} d\,z \int_0^r d\,y \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} (z^2 + x^2)\, d\,x\,,$$

$$= d \,.\, \int_{\Delta}^{\Delta+h} d\,z \int_0^r d\,y \left[z^2 \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right],$$

essendosi indicato con Δ la distanza della prima base dall'asse. Per integrare conviene fare un cambiamento di variabile; posto:

$$(C\,A\,,\, x') = \theta$$

verrà:

$$y = r \operatorname{sen} \theta\,, \quad d\,y = r \cos \theta\, d\,\theta\,,$$

$$\sqrt{r^2 - y^2} = r \cos \theta\,,$$

e, sostituendo:

$$\frac{1}{4} M = d \cdot \int_{\Delta}^{\Delta+h} dz \left(r^2 z^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta + \frac{r^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta \right),$$

$$= d \cdot \int_{\Delta}^{\Delta+h} dz \left(r^2 z^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta + \frac{r^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}}{4} d\theta \right),$$

$$= d \cdot \int_{\Delta}^{\Delta+h} dz \left[r^2 z^2 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{r^4}{3} \left(\frac{1}{4} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8} \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

$$= \frac{\pi r^2 d}{4} \cdot \int_{\Delta}^{\Delta+h} dz \left(z^2 + \frac{r^2}{4} \right),$$

$$= \frac{\pi r^2 d}{4} \cdot \left[\frac{(\Delta + h)^3}{3} - \frac{\Delta^3}{3} + \frac{r^2 h}{4} \right],$$

$$= \frac{\pi r^2 d}{4} \cdot \left(\Delta^2 h + h^2 \Delta + \frac{h^3}{3} + \frac{r^2 h}{4} \right),$$

ossia :

$$(7) \qquad M = \pi r^2 d \cdot \left(\Delta^2 h + h^2 \Delta + \frac{h^3}{3} + \frac{r^2 h}{4} \right).$$

Se si adopera questa formola nel caso nostro risulta :

$$M_S = 0{,}00158 ;$$

è dunque :

$$\frac{M_A}{M_T + M_S} = 55{,}5 .$$

L' equipaggio è sospeso con un filo di bozzolo, che nel mio apparecchio aveva all' incirca un mezzo metro di lunghezza; l' anello d' argento viene a trovarsi, come bene si comprende, nello spazio che sta fra le due bobine, e il tubetto di vetro traversa in tutta la sua lunghezza la bobina superiore.

L' intero apparecchio fu coperto con un cilindro di cartone, munito di finestra a vetri.

§ 11. Per la misura del campo elettromagnetico mi sono valso di una spirale di bismuto [1]), costrutta e tarata dalla casa Hartmann e Braun di Francoforte s. Meno. Le indicazioni, che si ottengono per questa via hanno una concordanza sufficiente, se pure non perfettissima.

La resistenza della spirale cambia infatti da un giorno all' altro senza che si possa cercarne la causa in condizioni esterne mutate, per esempio nella temperatura: ma l' incremento relativo si mantiene press' a poco uniforme. I dati, che riporto più avanti, offrono di tale fenomeno un esempio caratteristico.

Del resto a me importava sopra tutto di conoscere l' ordine di grandezza dei campi impiegati, e d' altra parte mi occorreva un metodo di misura, che non impedisse di tenere estremamente vicini i due nuclei dell' elettromagnete.

Nelle esperienze definitive la corrente dentro le bobine fu sempre di 20 Ampère, la distanza fra le superfici affacciate dei nuclei di 0,2 centimetri.

Ritrovavo questa condizione collocando su la bobina inferiore dei pezzetti di lastra di rame, e allentando poi le viti in modo che l' altra bobina vi si venisse ad appoggiare.

Ho determinato con qualche cura il campo corrispondente, ripetendo l' esperienza cinque volte in diverse giornate. Riporterò, come saggio di tali determinazioni, i numeri, che si riferiscono a due misure.

1a esp. — 23 Gennaio 1901.

Resistenza di confronto
32 Ohm.

Posizione del corsoio sul filo		Resistenza della spirale
Corrente nulla . .	49,2	30,99
» di 20 Amp.	49,6	31,49

$$\frac{\Delta R}{R} = 0,0161.$$

1) Spirale N. 225, avuta in prestito dal Prof. G. Grassi del R. Museo Industriale.

2ª esp. — 27 Gennaio 1901.

Resistenza di confronto
32 Ohm.

	Posizione del corsoio sul filo	Resistenza della spirale
Corrente nulla . .	50,9	33,17
» di 20 Amp.	51,3	33,72

$$\frac{\Delta R}{R} = 0{,}0166.$$

Come media di queste e delle tre esperienze rimanenti si può assumere:

$$\frac{\Delta R}{R} = 0{,}016\ ;$$

ora la curva di taratura, della quale riproduco una porzione nella figura 6, importerebbe in corrispondenza di questa ordinata un campo di circa mille unità (C. G. S).

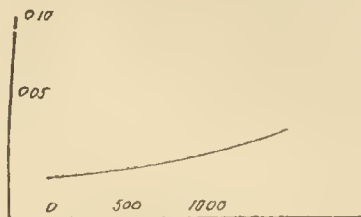



Fig. 6.

§ 12. Lo specchietto essendo piano le osservazioni si facevano con scala e cannocchiale nel modo ordinario; l' obbiettivo di quest' ultimo era disposto a due metri esattamente dall' asse dell' equipaggio mobile.

Il resultato della ricerca fu negativo.

Quando si stabilisce la corrente si vede nel campo del cannocchiale uno spostamento della scala, che, anche nei casi più favorevoli, importa sempre un paio di divisioni (millimetri). Questo spostamento non si inverte con la forza magnetica, e dura quanto il flusso; deve quindi ascriversi ad azioni attrattive, la cui risultante riesce diversa da zero per le dissimetrie inevitabili dell' equipaggio.

Interrompendo la corrente si *ricasca* alla posizione d'equilibrio, con un gran numero d'oscillazioni. Anche quì il senso della forza magnetica non sembra esercitare la minima influenza.

Le esperienze conducono senz'altro alla determinazione di un limite massimo per la costante K.

Spostandosi la scala della quantità s, mentre la distanza fra lo specchio e l'obbiettivo è Δ, l'angolo x descritto dall'equipaggio mobile si determinerà con l'equazione:

$$\frac{s}{\Delta} = \operatorname{tg} 2x, \\ = 2x.$$

dalla quale si ricava:

$$x = \frac{s}{2\Delta};$$

nel caso nostro, poichè lo spostamento cercato è inferiore, senza dubbio, a una divisione, avremo:

$$|x| < \frac{0,1}{400}, \\ < 0,00025.$$

La formola (5) fornisce:

$$|x| = \frac{|K| \cdot |H|}{4\pi r_1^2 d\rho \frac{z-1}{\log z}},$$

e quindi:

$$\frac{|K| \cdot |H|}{4\pi r_1^2 d\rho \frac{z-1}{\log z}} < 0,00025,$$

ossia:

$$|K| < \frac{0,00025}{|H| \cdot \log z} 4\pi r_1^2 d\rho (z-1).$$

Se si introducono nel secondo membro di questa disuguaglianza i valori numerici già noti, e che riporto ancora una volta nello specchio seguente:

$$r_1 = 0,3 \qquad z = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4 = 7,72$$

$$r_2 = 0,5$$

$$d = 10,47 \qquad |H| = 1000$$

$$\rho = 1,402 \cdot 10^3$$

si ottiene:

$$|K| < 0,015.$$

§ 13. Questo numero acquista un significato solamente se lo si paragona con i valori numerici dei coefficienti degli altri termini dell' energia cinetica.

Quanto al momento di inerzia ho già dato la sua espressione e la sua grandezza; rimane solo da calcolare il coefficiente di autoinduzione.

La cosa si fa agevolmente, applicando una formola del Maxwell, che fornisce il coefficiente di induzione mutua (P) di due cerchi, posti in piani paralleli per modo che i centri stiano sopra una perpendicolare alla giacitura comune [1]).

La formola è la seguente:

$$P = 4\pi a \left(1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2 + 3y^2}{16a^2} + \ldots\right) \log \frac{8a}{b}$$
$$+ 4\pi a \left(-2 - \frac{x}{2a} + \frac{3x^2 - y^2}{16a^2} + \ldots\right),$$

in essa:

a è il raggio di uno dei due cerchi,

$a + x$ è il raggio del secondo cerchio,

y è la distanza fra i due piani,

b è la distanza minima fra un punto del primo e uno del secondo cerchio.

1) L. c. pag. 311.

Per fare il calcolo nel caso nostro si consideri una sezione fatta con un piano passante per l' asse dell' anello; l' anello verrà segato secondo due rettangoli, uno dei quali è segnato in figura (fig. 7).

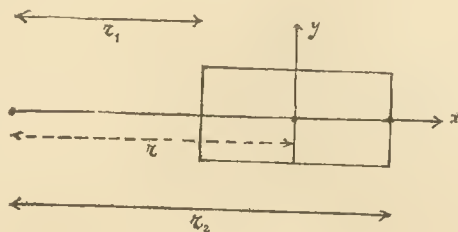



Fig. 7.

Nel piano della sezione si prendano due assi ortogonali, uno di essi (x) sia secondo il raggio dell' anello, l' altro (y) perpendicolare a questo primo.

L' origine sarà nell' incontro delle diagonali del rettangolo di traccia; ogni punto di questo rettangolo determina un cerchio, e il coefficiente di autoinduzione dell' anello si calcola tenendo conto dell' induzione mutua di tutte le coppie possibili di questi cerchi a sezione infinitesima.

Indicando con $(x_1 y_1)$ e $(x_2 y_2)$ rispettivamente due punti presi a caso dentro il rettangolo, e scrivendo r per $\frac{r_1 + r_2}{2}$, bisognerà nella formola di Maxwell porre:

in luogo di a . . . . $r + x_1$,
» » » x . . . . $x_2 - x_1$,
» » » y . . . . $y_2 - y_1$,
» » » b . . . . $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Viene dunque:

$$P = 4\pi(r+x_1)\left[1+\frac{x_2-x_1}{2(r+x_1)}+\frac{(x_2-x_1)^2+3(y_2-y_1)^2}{16\,(r+x_1)^2}+\ldots\right]\log 8\,\frac{r+x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

$$+\,4\,\pi\,(r+x_1)\left[-2-\frac{x_2-x_1}{2\,(r+x_1)}+\frac{3\,(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}{16\,(r+x_1)^2}+\ldots\right],$$

ossia:

$$P=4\pi r\left(1+\frac{x_1}{r}\right)\left[1+\frac{x_2-x_1}{2r\left(1+\frac{x_1}{r}\right)}+\frac{(x_2-x_1)^2+3(y_2-y_1)^2}{16\,r^2\left(1+\frac{x_1}{r}\right)^2}\log 8\,\frac{r+x_1}{\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y_1)^2}}\right.$$

$$+4\pi r\left(1+\frac{x_1}{r}\right)\left[-2-\frac{x_2-x_1}{2r\left(1+\frac{x_1}{r}\right)}+\frac{3(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}{16\,r^2\left(1+\frac{x_1}{r}\right)^2}+\dots\right],$$

$$=4\pi r\left(1+\frac{x_1}{r}\right)\left[1+\frac{x_2-x_1}{2r}\left(1-\frac{x_1}{r}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(x_2-x_1)^2+3(y_2-y_1)^2}{16\,r^2}\left(1-2\frac{x_1}{r}\right)+\dots\right]\log 8\,\frac{r+x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

$$+4\pi r\left(1+\frac{x_1}{r}\right)\left[-2-\frac{x_2-x_1}{2r}\left(1-\frac{x_1}{r}\right)+\frac{3(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}{16\,r^2}\left(1-2\frac{x_1}{r}\right)+\dots\right],$$

$$=4\pi r\left(1+\frac{x_1}{r}\right)\left[1+\frac{x_2-x_1}{2r}-\frac{x_2x_1-x_1^2}{2r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(x_2-x_1)^2+3(y_2-y_1)^2}{16\,r^2}+\dots\right]\log 8\,\frac{r+x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

$$+4\pi r\left(1+\frac{x_1}{r}\right)\left[-2-\frac{x_2-x_1}{2r}+\frac{x_2x_1-x_1^2}{2r^2}+\frac{3(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}{16\,r^2}+\dots\right],$$

$$=4\pi r\left[1+\frac{x_2+x_1}{2r}+\frac{(x_2-x_1)^2+3(y_2-y_1)^2}{16\,r^2}+\dots\right]\log 8\,\frac{r+x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

$$+4\pi r\left[-2-\frac{x_2-x_1}{2r}-2\frac{x_1}{r}+\frac{3(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}{16\,r^2}+\dots\right].$$

A questo punto si noterà che è:

$$\log 8\,\frac{r+x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}=\log 8+\log\frac{r+x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}},$$

$$=\log 8+\log\frac{r}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}\left(1+\frac{x_1}{r}\right),$$

$$=\log 8\,\frac{r}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}+\log\left(1+\frac{x_1}{r}\right),$$

$$=\log 8\,\frac{r}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}+\frac{x_1}{r}-\frac{x_1^2}{2r^2}+\dots;$$

e quindi, sostituendo:

$$P=4\pi r\left[1+\frac{x_2+x_1}{2r}+\frac{(x_2-x_1)^2+3(y_2-y_1)^2}{16r^2}\right]\log 8\frac{r}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

$$+4\pi r\left[-2-\frac{x_2-x_1}{2r}-2\frac{x_1}{r}+\frac{3(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}{16r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{x_1}{r}+\frac{(x_2+x_1)x_1}{2r^2}-\frac{x_1^2}{2r^2}\right],$$

$$=4\pi r\left[1+\frac{x_2+x_1}{2r}+\frac{(x_2-x_1)^2+3(y_2-y_1)^2}{16r^2}\right]\log 8\frac{r}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

$$+4\pi r\left[-2-\frac{x_2+x_1}{2r}+\frac{x_1x_2}{2r^2}+\frac{3(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}{16r^2}\right],$$

$$=4\pi r\log 8r.\left[1+\frac{x_2+x_1}{2r}+\frac{(x_2-x_1)^2+3(y_2-y_1)^2}{16r^2}\right]$$

$$+4\pi r\left[-2-\frac{x_2+x_1}{2r}+\frac{x_1x_2}{2r^2}+\frac{3(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}{16r^2}\right]$$

$$-4\pi r\log\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.\left[1+\frac{x_2+x_1}{2r}+\frac{(x_2-x_1)^2+3(y_2y_1)^2}{16r^2}\right],$$

$$=P_1-P_2\log\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Conservando alle lettere l ed h il loro significato [1]) potremo scrivere il coefficiente di autoinduzione dell' anello sotto la forma:

$$L=\frac{1}{l^2h^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}dy_2\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}dy_1\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}dx_2\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}dx_1\left[P_1-P_2\log\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right].$$

Bisogna adesso fare la sostituzione ed eseguire i calcoli.

1) Si confronti il sesto paragrafo.

Porremo anzitutto:

$$L = L_1 - L_2 ,$$

$$L_1 = \frac{1}{l^2 h^2} \iiiint dy_2\, dy_1\, dx_2\, dx_1\, P_1 ,$$

$$L_2 = \frac{1}{l^2 h^2} \iiiint dy_2\, dy_1\, dx_2\, dx_1\, P_2 \log \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

Il primo termine si calcola immediatamente e fornisce:

$$L_1 = \frac{1}{l^2 h^2} \left[4\pi r \log 8r . \left(l^2 h^2 + \frac{1}{96} \frac{l^4 h^2}{r^2} + \frac{1}{32} \frac{l^2 h^4}{r^2} \right) \right.$$

$$\left. + 4\pi r \left(-2 l^2 h^2 + \frac{1}{32} \frac{l^4 h^2}{r^2} - \frac{1}{96} \frac{l^2 h^4}{r^2} \right) \right] ,$$

$$= 4\pi r \log 8r . \left(1 + \frac{1}{96} \frac{l^2}{r^2} + \frac{1}{32} \frac{h^2}{r^2} \right)$$

$$+ 4\pi r \left(-2 + \frac{1}{32} \frac{l^2}{r^2} - \frac{1}{96} \frac{h^2}{r^2} \right) ;$$

se si fa l' ipotesi che i termini in $\frac{l^2}{r^2}$, $\frac{h^2}{r^2}$ siano trascurabili rispetto agli altri risulta:

$$L'_1 = 4\pi r (\log 8r - 2) .$$

Ed ora resta da calcolare il secondo termine, cioè:

$$L_2 = \frac{1}{l^2 h^2} \iiiint dy_2\, dy_1\, dx_2\, dx_1\, P_2 \log \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} ;$$

questo può scindersi in quattro, ponendo in luogo di P_2 la sua espressione. Sarà infatti:

$$L_2 = L_{2,1} + L_{2,2} + L_{2,3} + L_{2,4} ,$$

con:

$$L_{2,1} = \frac{4\pi r}{l^2 h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_1 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_1 \log \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} ,$$

$$L_{2,2}=\frac{4\pi r}{l^2 h^2}\cdot\frac{1}{2r}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}dy_2\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}dy_1\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}dx_2\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}dx_1(x_2+x_1)\log\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

$$L_{2,3}=\frac{4\pi r}{l^2 h^2}\cdot\frac{1}{16r^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}dy_2\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}dy_1\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}dx_2\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}dx_1(x_2-x_1)^2\log\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

$$L_{2,4}=\frac{4\pi r}{l^2 h^2}\cdot\frac{3}{16r^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}dy_2\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}dy_1\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}dx_2\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}dx_1(y_2-y_1)^2\log\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Il primo di tali termini, $L_{2,1}$, fu già calcolato dal Maxwell [1]), a meno del fattore $4\pi r$ esso rappresenta infatti *il logaritmo della distanza geometrica media* (m) *del rettangolo da se medesimo*, è quindi:

$$L_{2,1}=4\pi r\log m=4\pi r\left[\frac{1}{2}\log(h^2+l^2)-\frac{1}{12}\frac{l^2}{h^2}\log\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{12}\frac{h^2}{l^2}\log\left(1+\frac{l^2}{h^2}\right)+\frac{2}{3}\frac{l}{h}\operatorname{artg}\frac{h}{l}+\frac{2}{3}\frac{h}{l}\operatorname{artg}\frac{l}{h}-\frac{25}{12}\right].$$

Il secondo termine, $L_{2,2}$, è nullo, come è facile vedere; in generale infatti si avrà:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}dx_2\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}dx_1 X(x_1,x_2)=\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}dx_2\left(\int_0^{+\frac{l}{2}}dx_1X-\int_0^{-\frac{l}{2}}dx_1X\right),$$

$$=\int_0^{+\frac{l}{2}}dx_2\int_0^{+\frac{l}{2}}dx_1X-\int_0^{+\frac{l}{2}}dx_2\int_0^{-\frac{l}{2}}dx_1X-\int_0^{-\frac{l}{2}}dx_2\int_0^{+\frac{l}{2}}dx_1X+\int_0^{-\frac{l}{2}}dx_2\int_0^{-\frac{l}{2}}dx_1X;$$

1) L. c. pag. 296.

consideriamo in particolare il primo termine, ponendo per $X(x_1, x_2)$ la sua espressione, vale a dire occupiamoci dell' integrale:

$$\int_0^{+\frac{l}{2}} dx_2 \int_0^{+\frac{l}{2}} dx_1 \, (x_2 + x_1) \log \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + c^2} \, .$$

Prendendo delle nuove variabili, definite dalle relazioni:

$$z_1 = - x_1 \, ,$$
$$z_2 = - x_2 \, ,$$

esso diventa:

$$- \int_0^{-\frac{l}{2}} dz_2 \int_0^{-\frac{l}{2}} dz_1 \, (z_2 + z_1) \log \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + c^2} \, ,$$

e poichè, trattandosi di integrali definiti, i nomi delle variabili non importano, potrà scriversi anche:

$$- \int_0^{-\frac{l}{2}} dx_2 \int_0^{-\frac{l}{2}} dx_1 \, (x_2 + x_1) \log \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + c^2} \, ;$$

il primo termine nell' espressione di $L_{2,2}$ si distrugge dunque con l' ultimo. Similmente si troverebbe che il secondo annulla il terzo, essendo:

$$- \int_0^{+\frac{l}{2}} dx_2 \int_0^{-\frac{l}{2}} dx_1 \, (x_2 + x_1) \log \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + c^2} =$$

$$= \int_0^{-\frac{l}{2}} dx_2 \int_0^{+\frac{l}{2}} dx_1 \, (x_2 + x_1) \log \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + c^2} \, ;$$

vuol dire che $L_{2,2}$ è nullo identicamente, come si era annunciato. Restano a calcolarsi $L_{2,3}$ e $L_{2,4}$, ma si capisce che i cal-

coli, che servono per uno di questi integrali sono anche utili per l' altro, dal momento che, a meno di un fattore numerico, si passa dal primo al secondo semplicemente scambiando le x con le y.

Facciamo dunque, per esempio, l' integrazione di:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_1 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_1 \, (x_2 - x_1)^2 \log \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \, .$$

Gli sviluppi riescono assai lunghi e tediosi, ma non offrono nessuna speciale difficoltà; le formole, che s' impiegano un gran numero di volte nel corso del calcolo, sono le seguenti, le quali tutte possono dedursi per mezzo di successive integrazioni parziali:

$$a). \int x^m \log (x^2 + c^2)\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log (x^2 + c^2) - \frac{2}{m+1} \frac{x^{m+1}}{m+1} +$$

$$+ \frac{2}{m+1} c^2 \frac{x^{m-1}}{m-1} - \frac{2}{m+1} c^4 \frac{x^{m-3}}{m-3} + \ldots \pm \frac{2}{m+1} c^{m-1} \frac{x^2}{2} \mp$$

$$\mp \frac{2}{m+1} c^{m+1} \frac{1}{2} \log (x^2 + c^2) + \mathrm{C} ,$$

(per m intero e dispari)

$$b). \int x^m \log (x^2 + c^2)\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log (x^2 + c^2) - \frac{2}{m+1} \frac{x^{m+1}}{m+1} +$$

$$+ \frac{2}{m+1} c^2 \frac{x^{m-1}}{m-1} - \frac{2}{m+1} c^4 \frac{x^{m-3}}{m-3} + \ldots \pm \frac{2}{m+1} c^m x \mp$$

$$\mp \frac{2}{m+1} c^{m+1} \operatorname{artg} \frac{x}{c} + \mathrm{C} ,$$

(per m intero e pari)

$$c). \int x^m \log x^2 \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x^2 - \frac{2}{m+1} \frac{x^{m+1}}{m+1} + \mathrm{C} ,$$

(per m qualunque)

$$d). \int x^m \operatorname{artg}\frac{c}{x}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\operatorname{artg}\frac{c}{x} + \frac{c}{m+1}\frac{x^m}{m} - \frac{c^3}{m+1}\frac{x^{m-2}}{m-2} + \frac{c^5}{m+1}\frac{x^{m-4}}{m-4} - \ldots \pm \frac{c^m}{m+1}x \mp \frac{c^{m+1}}{m+1}\operatorname{artg}\frac{x}{c} + C,$$

(per m intero e dispari)

$$e). \int x^m \operatorname{artg}\frac{c}{x}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\operatorname{artg}\frac{c}{x} + \frac{c}{m+1}\frac{x^m}{m} - \frac{c^3}{m+1}\frac{x^{m-2}}{m-2} + \frac{c^5}{m+1}\frac{x^{m-4}}{m-4} - \ldots \pm \frac{c^{m-1}}{m+1}\frac{x^2}{2} \mp \frac{c^{m+1}}{m+1}\frac{1}{2}\log(x^2+c^2) + C,$$

(per m intero e pari)

$$f). \int \operatorname{artg}\frac{x}{c}\,dx = x\operatorname{artg}\frac{x}{c} - \frac{c}{2}\log(x^2+c^2) + C.$$

Eseguendo il calcolo per intero risulta:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_1 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_1\,(x_2-x_1)^2 \log\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{10}l^2h^4 - \frac{19}{36}l^4h^2 - \frac{1}{15}l^6\log\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right) + \frac{1}{30}h^6\log\left(1+\frac{l^2}{h^2}\right) + \frac{1}{6}l^4h^2\log(l^2+h^2) - \frac{2}{15}l\,h^5\operatorname{artg}\frac{h}{l} + \frac{2}{5}l^5h\operatorname{artg}\frac{l}{h}\right],$$

$$= \frac{1}{20}l^2h^4 - \frac{19}{72}l^4h^2 - \frac{1}{30}l^6\log\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right) + \frac{1}{60}h^6\log\left(1+\frac{l^2}{h^2}\right) + \frac{1}{12}l^4h^2\log(l^2+h^2) - \frac{1}{15}l\,h^5\operatorname{artg}\frac{h}{l} + \frac{1}{5}l^5h\operatorname{artg}\frac{l}{h}.$$

Si ottiene dunque senz' altro:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_1 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_1\,(y_2-y_1)^2 \log\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}$$

$$= \frac{1}{20}h^2l^4 - \frac{19}{72}h^4l^2 - \frac{1}{30}h^6\log\left(1+\frac{l^2}{h^2}\right) + \frac{1}{60}l^6\log\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right) + \frac{1}{12}h^4l^2\log(h^2+l^2) - \frac{1}{15}h\,l^5\operatorname{artg}\frac{l}{h} + \frac{1}{5}h^5l\operatorname{artg}\frac{h}{l}.$$

Con questi elementi si possono valutare con tutta facilità i termini $L_{2,3}$ e $L_{2,4}$ del nostro coefficiente di autoinduzione.

Viene infatti:

$$
\begin{aligned}
L_{2,3}+L_{2,4}=\frac{4\pi r}{l^2h^2}\cdot\frac{1}{16r^2}\Big\{&\frac{1}{20}l^2h^4-\frac{19}{72}l^4h^2-\frac{1}{30}l^6\log\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right)\\
&+\frac{1}{60}h^6\log\left(1+\frac{l^2}{h^2}\right)+\frac{1}{12}l^4h^2\log(l^2+h^2)-\frac{1}{15}lh^5\operatorname{artg}\frac{h}{l}\\
&+\frac{1}{5}l^5h\operatorname{artg}\frac{l}{h}+3\Big[-\frac{19}{72}l^2h^4+\frac{1}{20}l^4h^2+\frac{1}{60}l^6\log\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right)\\
&-\frac{1}{30}h^6\log\left(1+\frac{l^2}{h^2}\right)+\frac{1}{12}h^4l^2\log(l^2+h^2)\\
&+\frac{1}{5}lh^5\operatorname{artg}\frac{h}{l}-\frac{1}{15}l^5h\operatorname{artg}\frac{l}{h}\Big]\Big\},\\
=\frac{4\pi r}{l^2h^2}\cdot\frac{1}{16r^2}\Big[&\left(\frac{1}{20}-3\cdot\frac{19}{72}\right)l^2h^4-\left(\frac{19}{72}-3\cdot\frac{1}{20}\right)l^4h^2\\
&-\left(\frac{1}{30}-3\cdot\frac{1}{60}\right)l^6\log\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right)+\left(\frac{1}{60}-3\cdot\frac{1}{30}\right)h^6\log\left(1+\frac{l^2}{h^2}\right)\\
&+\left(\frac{1}{12}l^2+3\cdot\frac{1}{12}h^2\right)l^2h^2\log(l^2+h^2)\\
&-\left(\frac{1}{15}-3\cdot\frac{1}{5}\right)lh^5\operatorname{artg}\frac{h}{l}+\left(\frac{1}{5}-3\cdot\frac{1}{15}\right)l^5h\operatorname{artg}\frac{l}{h}\Big],\\
=\frac{4\pi r}{l^2h^2}\cdot\frac{1}{16r^2}\Big[&-\frac{89}{120}l^2h^4-\frac{41}{360}l^4h^2+\frac{1}{60}l^6\log\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right)\\
&-\frac{1}{12}h^6\log\left(1+\frac{l^2}{h^2}\right)+\left(\frac{1}{12}l^2+\frac{1}{4}h^2\right)l^2h^2\log(l^2+h^2)\\
&+\frac{8}{15}lh^5\operatorname{artg}\frac{h}{l}\Big],\\
=4\pi r\cdot\frac{1}{16r^2}\Big[&-\frac{89}{120}h^2-\frac{41}{360}l^2+\frac{1}{60}\frac{l^4}{h^2}\log\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right)\\
&-\frac{1}{12}\frac{h^4}{l^2}\log\left(1+\frac{l^2}{h^2}\right)+\left(\frac{1}{12}l^2+\frac{1}{4}h^2\right)\log(l^2+h^2)\\
&+\frac{8}{15}\frac{h^3}{l}\operatorname{artg}\frac{h}{l}\Big];
\end{aligned}
$$

e, se si fa l'ipotesi che i termini in $\frac{l^2}{r^2}$, $\frac{h^2}{r^2}$ siano trascurabili rispetto agli altri, risulta:

$$L'_{2,1} = L_{2,1} = 4\pi r \log m$$
$$L'_{2,3} + L'_{2,4} = 0\,;$$

viene dunque, in prima approssimazione:

$$\begin{aligned} L = L' &= L'_1 - L'_2\,, \\ &= 4\pi r(\log 8r - 2) - 4\pi r \log m\,, \\ &= 4\pi r\left(\log \frac{8r}{m} - 2\right), \\ &= 4\pi \frac{r_1 + r_2}{2}\left[\log \frac{8\,\frac{r_1+r_2}{2}}{m} - 2\right], \end{aligned}$$

$$= 2\pi(r_1 + r_2)\left[\log \frac{4(r_1+r_2)}{m} - 2\right]; \tag{8}$$

che è la formola, che io ho dato in una nota preventiva, nella quale ho riassunto la prima parte di questo lavoro [1]).

Nel caso più generale si ottiene invece:

$$\begin{aligned} L &= L_1 - L_2\,, \\ &= 4\pi r\Big\{\log 8r\,.\left(1 + \frac{1}{96}\frac{l^2}{r^2} + \frac{1}{32}\frac{h^2}{r^2}\right) - \log m - 2 + \frac{1}{32}\frac{l^2}{r^2} - \frac{1}{96}\frac{h^2}{r^2} \\ &\quad - \frac{1}{16r^2}\Big[-\frac{89}{120}h^2 - \frac{41}{360}l^2 + \frac{1}{60}\frac{l^4}{h^2}\log\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right) - \frac{1}{12}\frac{h^4}{l^2}\log\left(1+\frac{l^2}{h^2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{12}l^2\log(l^2+h^2) + \frac{1}{4}h^2\log(l^2+h^2) + \frac{8}{15}\frac{h^3}{l}\operatorname{artg}\frac{h}{l}\Big]\Big\}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\pi(r_1+r_2)\Big\{\log 4(r_1+r_2)\,.\Big[1 + \frac{1}{24}\frac{l^2}{(r_1+r_2)^2} \\ &\quad + \frac{1}{8}\frac{h^2}{(r_1+r_2)^2}\Big] - \log m - 2 + \frac{1}{(r_1+r_2)^2}\Big[\frac{221}{1440}l^2 + \frac{23}{160}h^2 \\ &\quad - \frac{1}{240}\frac{l^4}{h^2}\log\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right) + \frac{1}{48}\frac{h^4}{l^2}\log\left(1+\frac{l^2}{h^2}\right) - \frac{1}{48}l^2\log(l^2+h^2) \\ &\quad - \frac{1}{16}h^2\log(l^2+h^2) + \frac{2}{15}\frac{h^3}{l}\operatorname{artg}\frac{h}{l}\Big]\Big\}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

$$= L' + L''$$

1) Atti della R. Accademia di Torino (Adunanza del 24 Febbraio 1901).

Fatto il calcolo viene:

$$L' = 9,44 ,$$

$$L'' = 0,12 ,$$

e quindi:

$$L = 9,56 ,$$

il quale resultato fa vedere come la formola (8) possa impiegarsi senza errore notevole nei casi della pratica.

§ 14. Siamo in grado adesso di confrontare tra loro i tre coefficienti dei termini dell' energia.

Viene infatti:

$$\frac{L}{|K|} > \frac{9560}{15}, \qquad \text{e} \qquad \frac{M}{|K|} > \frac{89}{15},$$

$$> 600, \qquad\qquad > 6 \text{ circa}.$$

Dei tre termini dunque, che costituiscono l' espressione di T, quello che corrisponde all' energia magnetica è di gran lunga il più importante; e il termine del rettangolo si può rigorosamente trascurare rispetto ad esso. Non è lecito concludere per ora che sia anche trascurabile davanti all' altro, che esprime l' energia cinetica delle masse ponderali.

Ad ogni modo però, anche nel caso più favorevole, l' effetto di codesto termine in pratica non si sente.

§ 15. Resta a vedersi da ultimo come i resultati delle nostre esperienze si possano interpretare dal punto di vista della teoria; considereremo all' uopo un po' più da vicino un modello del fenomeno. E sarà l' ingranaggio differenziale, studiato dal Maxwell, del quale ho fatto cenno nel primo paragrafo.

In questo caso particolare il termine del rettangolo, a meno di un fattore numerico, ha per coefficiente la differenza:

$$M_{3,1} - M_{3,2} ,$$

ed è ben chiaro che, nelle condizioni nelle quali l' apparecchio fu impiegato dal Maxwell, dall' Ebert e ultimamente da me, codesto binomio deve essere sempre positivo.

La ruota R_3 ha infatti lo stesso diametro delle altre due, il suo raggio misura dunque la distanza dall' asse a'. Ne viene così che il valore minimo assunto da r nell' espressione di $M_{3,1}$ pareggia il valore massimo, del quale si deve tener conto per valutare l' altro momento; e però:

$$M_{3,1} > M_{3,2}.$$

Del resto la cosa si vede anche meglio riferendosi alle formole. Sarà infatti, secondo la (7):

$$M_{3,1} = \pi r^2 d . \left(r^2 h + h^2 r + \frac{h^3}{3} + \frac{r^2 h}{4} \right),$$

$$= \pi r^2 d . \left(\frac{5 r^2 h}{4} + h^2 r + \frac{h^3}{3} \right),$$

mentre che, per la (4) deve scriversi:

$$M_{3,2} = \frac{1}{2} \pi h d r^4 ;$$

segue dunque:

$$M_{3,1} - M_{3,2} = \pi r^2 d . \left(\frac{1}{3} h^3 + h^2 r + \frac{3}{4} h r^2 \right),$$

la quale somma, avendo tutti i termini positivi, è positiva.

Questa è la ragione, che rende l' apparecchio bene adatto per rappresentare i fenomeni induttivi fra due circuiti; nel caso dell' elettrodinamica infatti il coefficiente del rettangolo è una quantità maggiore di zero.

Le conclusioni del paragrafo decimoquarto invece porterebbero ad ammettere che, nel biciclo considerato da noi, deve ritenersi K, praticamente, uguale allo zero.

Questo avviene senza dubbio se non vi sono vincoli fra il primo e il secondo sistema parziale; ma non è lecito concludere senz' altro che i vincoli manchino quando il coefficiente del rettangolo si annulla: la cosa rimane a decidersi.

Noi possiamo anzi proporci un problema più generale, se cioè vi siano delle disposizioni che rendano *non positivo* il polinomio:

$$\sum_P (M_{P,1} - M_{P,2}),$$

dove la somma accenna all' esistenza di altri organi accessorii nel sistema di trasmissione. Studiamo a questo scopo l' effetto di un anello, connesso rigidamente con la ruota R_3, e centrato sopra a''.

Il suo momento intorno all' asse in discorso si deduce al solito dalla (4), ha dunque per grandezza:

$$M_{A,2} = \frac{1}{2} \pi h d . (r_2^4 - r_1^4) ;$$

quanto al momento relativo all' asse a' possiamo ricavarlo per differenza dalla formola (7), sottraendo dall' espressione, che vale per la ruota piena di raggio r_2 e spessore h, il momento della ruota definita dalle costanti r_1 e h.

Quindi sarà:

$$M_{A,1} = \pi d . \left[\left(r_2^2 \Delta^2 h + r_2^2 h^2 \Delta + \frac{r_2^2 h^3}{3} + \frac{r_2^4 h}{4} \right) - \left(r_1^2 \Delta^2 h + r_1^2 h^2 \Delta + \frac{r_1^2 h^3}{3} + \frac{r_1^4 h}{4} \right) \right] .$$

Nel caso particolare in cui è $\Delta = 0$, caso che in pratica può verificarsi solo per approssimazione, verrebbe:

$$M'_{A,1} = \pi d . \left[\frac{h^3}{3} (r_2^2 - r_1^2) + \frac{h}{4} (r_2^4 - r_1^4) \right] ,$$

sarebbe dunque:

$$M'_{A,1} - M_{A,2} = \pi d . \left[\frac{h^3}{3} (r_2^2 - r_1^2) + \frac{h}{4} (r_2^4 - r_1^4) - \frac{h}{2} (r_2^4 - r_1^4) \right] ,$$

$$= \pi d . \left[\frac{h^3}{3} (r_2^2 - r_1^2) - \frac{h}{4} (r_2^4 - r_1^4) \right] ,$$

la quale differenza può manifestamente rendersi negativa. Quando è data la ruota R_3, vale a dire è dato il binomio:

$$M_{3,1} - M_{3,2} = k^2 ,$$

bisognerà, per annullare o invertire l' effetto dei vincoli rendere:

$$k^2 + \pi d . \left[\frac{h^3}{3} (r_2^2 - r_1^2) - \frac{h}{4} (r_2^4 - r_1^4) \right] \overline{\gtrless} 0 ,$$

ossia:

$$k^2 + \pi h d . (r_2^2 - r_1^2)\left[\frac{h^2}{3} - \frac{1}{4}(r_2^2 + r_1^2)\right] \overline{\overline{<}} 0 ,$$

$$\pi h d . (r_2^2 - r_1^2)\left[\frac{1}{4}(r_2^2 + r_1^2) - \frac{h^2}{3}\right] \overline{\overline{>}} k^2 .$$

Se, per esempio, ci diamo la condizione $h = 1$, risulta:

$$\pi d . (r_2^2 - r_1^2)\left[\frac{1}{4}(r_2^2 + r_1^2) - \frac{1}{3}\right] \overline{\overline{>}} k^2 .$$

Io ho posto, in un modello, che ho realmente costruito:

$$l = 5 ,$$

vale a dire:

$$r_2 = r_1 + 5 ,$$

$$r_2^2 = r_1^2 + 25 + 10 r_1 ,$$

$$r_2^2 - r_1^2 = 25 + 10 r_1 ,$$

$$r_2^2 + r_1^2 = 2 r_1^2 + 25 + 10 r_1 ,$$

sostituendo i quali valori si ottiene:

$$\pi d . (25 + 10 r_1)\left(\frac{2 r_1^2 + 25 + 10 r_1}{4} - \frac{1}{3}\right) \overline{\overline{>}} k^2 .$$

Per la ruota R_3 si ha, nel mio apparecchio:

$$r = 6 ,$$

$$h = 1 ,$$

e però:

$$M_{3,1} - M_{3,2} = k^2 = \pi d . 1200 .$$

La condizione che determina r_1 è dunque:

$$(25 + 10 r_1)\left(\frac{2 r_1^2 + 25 + 10 r_1}{4} - \frac{1}{3}\right) \overline{\overline{>}} 1200 ,$$

e da essa si deduce:

$$r_1 \overline{\overline{>}} 3{,}42.$$

Non sarebbe possibile, in pratica, applicare all' apparecchio un anello con il raggio di 3,42 cm., il quale riuscirebbe in parte compreso dentro lo spazio limitato dall' asse a' e dalle tre ruote. Conviene invece prendere un anello assai più grande; per modo che il caso limite:

$$M_{3,1} - M_{3,2} + M_{A,1} - M_{A,2} = 0,$$

si verifichi per una distanza non nulla dall' asse e così si abbiano con facilità i fenomeni corrispondenti alle tre ipotesi:

$$M_{3,1} - M_{3,2} + M_{A,1} - M_{A,2} \lesseqgtr 0.$$

La cosa è tanto più consigliabile per ciò che, nell' apparecchio reale, vi sono altri organi, i cui momenti sono lungi dall' essere trascurabili, e riescono sempre più grandi intorno ad a' che ad a''.

Vi è (fig. 8) il manicotto e l' asse, che portano la ruota R_3, un altro manicotto fisso, che impedisce al primo di spo-

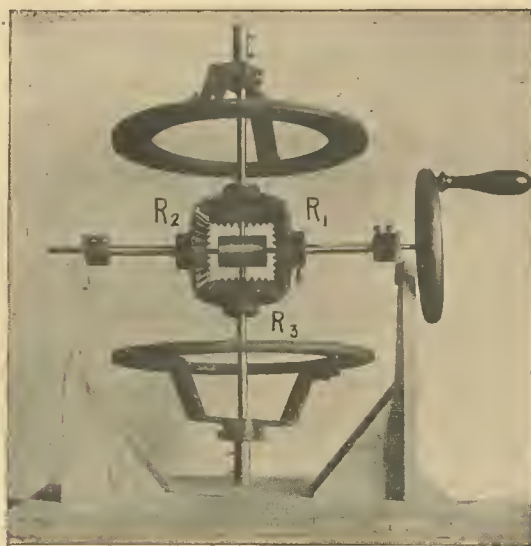



Fig. 8.

starsi lungo a'', e un terzo, al quale, con l' intermezzo di due robuste braccia di ferro, si raccomanda l' anello.

Per abbondanza ho scelto di dare a quest' ultimo le dimensioni :

$$r_1 = 12 ,$$

$$r_2 = 17 ,$$

$$h = 1$$ [1].

Ho poi aggiunto, simmetricamente ad R_3, una quarta ruota ed un secondo anello, per equilibrare il sistema. L'apparecchio risponde, benchè in modo grossolano, a ciò che la teoria prevede; del resto non si potrebbe pretendere una concordanza molto buona, dal momento che taluni organi importanti, come, per esempio, i pignoni, non hanno che in modo approssimato la forma semplice, che s' è supposta nei calcoli.

Si trova ad ogni modo che, portando gli anelli vicinissimi all' asse a', i fenomeni d' induzione riescono opposti di segno a quelli ordinarii; mentre per una certa distanza non v' è effetto sensibile del primo sul secondo sistema parziale. Al di là di questo limite le azioni induttive riprendono, come è facile intendere, il solito carattere.

Se ne deduce in primo luogo che il coefficiente K [2] può benissimo annullarsi senza che i vincoli facciano difetto.

Che se poi nel sistema si esercitano azioni induttive, i vincoli sono senza dubbio presenti, ma non è lecito dal segno di $\ddot{x}_1$ concludere a quello di $\ddot{x}_2$ dal momento che la K non è necessariamente positiva.

§ 16. Lo stesso resultato potrebbe anche ottenersi con la considerazione dell' ingranaggio di Huyghens, che fu proposto da Lord Rayleigh per illustrare i fenomeni del biciclo [3].

1) Tenendo conto dei dati presenti, e degli altri relativi ai singoli organi, che ho ricordato dianzi, si trova, p. e., per $\Delta = 1$:

$$\sum_P (M_{P,1} - M_{P,2}) < 0 .$$

2) Cioè, per l' ingranaggio differenziale, la somma :

$$\sum_P (M_{P,1} - M_{P,2}) .$$

3) Phil. Mag. (5), XXX, 30, 1890.

Due puleggie uguali, P_1 e P_2, (fig. 9), [1]) sono portate da un medesimo asse, AB, pur rimanendo indipendenti, e nelle

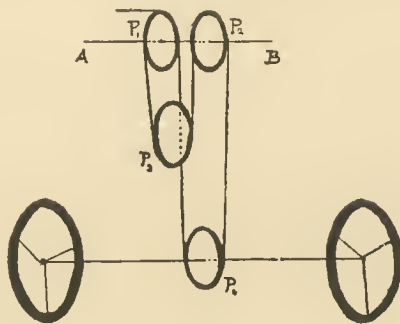



Fig. 9.

loro gole scorre una catena senza fine, la quale reca altre due carrucole, simili in tutto a quelle prime. La distanza fra P_1 e P_2, contata da gola a gola lungo A B, ha per misura il loro comune diametro.

Sia m il momento di inerzia di ogni puleggia intorno al suo asse, e μ la massa, e r il raggio; siano poi $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$ le velocità angolari di P_1 e P_2.

L' energia cinetica del sistema può scriversi manifestamente:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \mu \left[\frac{r(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)}{2}\right]^2,$$

$$= \frac{1}{2}\dot{x}_1^2\left(\frac{3}{2} m + \frac{1}{2} \mu r^2\right) + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2\left(\frac{3}{2} m + \frac{1}{2}\mu r^2\right) + \dot{x}_1\dot{x}_2 \frac{\mu r^2 - m}{2}.$$

È facile vedere che, in queste condizioni, il coefficiente del rettangolo è sempre positivo. Sarà infatti:

$$m = \frac{1}{2} \pi h d r^4,$$

$$\mu = \pi h d r^2,$$

1) Nella figura ho aggiunto i volani solamente alla quarta puleggia, per non complicare troppo il disegno.

e dunque:

$$\frac{1}{2}(\mu r^2 - m) = \frac{1}{2}\left(\pi h d r^4 - \frac{1}{2}\pi h d r^4\right),$$

$$= \frac{1}{4}\pi h d r^4 .$$

Ma se si imagina di aggiungere sopra gli assi delle puleggie P_3 e P_4 due coppie di volani le cose possono cambiare. In realtà, essendo per questi volani m' il momento e μ' la massa, verrà:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} m' \left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{2}\right)^2$$

$$+ 2 \cdot \frac{1}{2} \mu \left[\frac{r(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)}{2}\right]^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \mu' \left[\frac{r(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)}{2}\right]^2,$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{4}(m + 2m')(\dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2)$$

$$+ \frac{1}{4}(\mu + 2\mu')(\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2) r^2 ,$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\left[\frac{3}{2} m + m' + \frac{1}{2}(\mu + 2\mu')\right]$$

$$+ \dot{x}_1 \dot{x}_2 \frac{(\mu + 2\mu') r^2 - (m + 2m')}{2} .$$

Adesso si calcolerà agevolmente m' e μ' secondo le formole:

$$m' = \frac{1}{2}\pi h d \,.\, (r_2^4 - r_1^4) ,$$

$$\mu' = \pi h d \,.\, (r_2^2 - r_1^2) ,$$

supponendo, per semplificare, che i volani abbiano lo stesso spessore delle carrucole, e siano ricavati dallo stesso materiale.

Il coefficiente del rettangolo diventa:

$$\frac{1}{2}[(\mu + 2\mu') r^2 - (m + 2m')] = \frac{1}{2}\left\{[\pi h d r^2 + 2\pi h d (r_2^2 - r_1^2)] r^2 - \left[\frac{1}{2}\pi h d r^4 + \pi h d (r_2^4 - r_1^4)\right]\right\} ,$$

$$= \frac{1}{2}\pi h d \left\{\frac{1}{2} r^4 + (r_2^2 - r_1^2)[2r^2 - (r_2^2 + r_1^2)]\right\} ,$$

Supponiamo ancora, onde introdurre una determinazione ulteriore, che il raggio interno degli anelli (r_1) sia uguale all' esterno delle carrucole (r) e scriviamo:

$$A \text{ per } r^2 ,$$
$$A + B \text{ per } r_2^2;$$

verrà:

$$\frac{1}{2}[(\mu + 2\mu') r^2 - (m + 2m')] = \frac{1}{2}\pi h d \left(\frac{1}{2} A^2 - B^2\right);$$

si riesce dunque ad annullare o invertire i fenomeni di induzione facendo:

$$B^2 \gtreqless \frac{1}{2} A^2 ,$$

ciò che è sempre possibile.

§ 17. Queste cose, che abbiamo constatato con lo studio di due modelli dinamici e che potrebbero dunque, per ciò solo, come è noto, verificarsi anche in infiniti altri modi, permettono di enunciare alcune conseguenze sopra la natura dei vincoli, che collegano l' elettricità con la materia ponderale.

a) Appare infatti in primo luogo che *praticamente le cose vanno come se tali vincoli non esistessero.*

b) Malgrado questo, quando anche con ulteriore approssimazione si potesse mettere in sodo la mancanza del termine, che contiene il prodotto della velocità angolare e della intensità di corrente, *sarebbe sempre lecito supporre che i vincoli esistono, bensì sono dotati di certe speciali proprietà.*

c) Che se in qualche caso particolare si manifestasse un termine della forma $K \dot{x} y$ nell' espressione di T *seguirebbe bensì con certezza l' esistenza dei vincoli, ma non si potrebbe affermare nulla sul verso, nel quale si muove l' elettricità nei conduttori, che guidano le correnti.*

Torino, Maggio 1901.